ADS 2 příklady na cvičení

16. 12. 2020

1. Pokud bychom definovali P-úplnost analogicky k NP-úplnosti, které problémy z P by byly P-úplné?
2. Pro následující rozhodovací problémy dokažte, že jsou NP-Ú.
   - SAT: splnitelnost logických formulí v CNF
   - 3-SAT: každá klauzule obsahuje max. 3 literály
   - 3,3-SAT: navíc se každá proměnná vyskytuje nejvýše třikrát
   - Nezávislá množina: existuje množina alespoň k vrcholů, mezi nimiž nevede žádná hrana?
   - Klika: existuje úplný podgraf na k vrcholech?
   - Barvení grafu: lze obarvit vrcholy k barvami (přidělit každému vrcholu číslo od 1 do k) tak, aby vrcholy stejné barvy nebyly nikdy spojeny hranou)? To je NP-úplné už pro $k = 3$.
   - Hamiltonovská cesta: existuje cesta obsahující všechny vrcholy?
   - Hamiltonovská kružnice: existuje kružnice obsahující všechny vrcholy?
   - Součet podmnožiny: má daná množina přirozených čísel podmnožinu s daným součtem?
   - Batoh: jsou dány předměty s váhami a cenami a kapacita batohu, chceme najít co nejdražší podmnožinu předmětů, jejíž váha nepřesáhne kapacitu batohu. Aby se jednalo o rozhodovací problém, ptáme se, zda existuje podmnožina s cenou větší nebo rovnou zadanému číslu.
   - Dva loupežníci: lze rozdělit danou množinu čísel na dvě podmnožiny se stejným součtem?
   - $Ax = 1$ (soustava nula-jedničkových lineárních rovnic): je dána matice $A \in \{0,1\}^{m \times n}$. Existuje vektor $x \in \{0,1\}^n$ takový, že Ax je rovno vektoru samých jedniček?
3. Ukažte pro libovolný problém z předchozího cvičení, že pokud bychom ho dokázali v polynomiálním čase vyřešit, uměli bychom polynomiálně řešit i "zjišťovací" verzi (najít konkrétní párování, splňující ohodnocení, kliku apod.).
4. Problém MaxCut: vrcholy zadaného grafu chceme rozdělit do dvou množin tak, aby mezi množinami vedlo co nejvíce hran. Jinými slovy chceme nalézt bipartitní podgraf s co nejvíce hranami. Rozhodovací verze tohoto problému je NP-úplná, optimalizační verzi zkuste v polynomiálním čase 2-aproximovat.
5. Hledejme vrcholové pokrytí následujícím hladovým algoritmem. V každém kroku vybereme vrchol nejvyššího stupně, přidáme ho do pokrytí a odstraníme ho z grafu i se všemi již pokrytými hranami. Je nalezené pokrytí nejmenší? Nebo alespoň $O(1)$-aproximace nejmenšího?
6. Uvažujme následující algoritmus pro nejmenší vrcholové pokrytí grafu. Graf projdeme do hloubky, do výstupu vložíme všechny vrcholy vzniklého DFS stromu kromě listů. Dokažte, že vznikne vrcholové pokrytí a že 2-aproximuje to nejmenší.
7. V daném orientovaném grafu hledáme acyklický podgraf s co nejvíce hranami. Navrhněte polynomiální 2-aproximační algoritmus.