NAIL062 Logika: 1. cvičení

Příklad 1. Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře - červené, zelené a modré. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: *"Cesta ven je za těmito dveřmi."*
- Modré dveře: *"Cesta ven není za těmito dveřmi."*
- Zelené dveře: *"Cesta ven není za modrými dveřmi."*

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Formalizujte naše znalosti. Určete, za kterými dveřmi je cesta ven.

Příklad 2. Mějme daný graf G (neorientovaný, bez smyček) a dva jeho vrcholy u, v. Sestrojte výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když:

(a) G je bipartitní,

(b) G má perfektní párování,

(c) u a v leží v jedné komponentě souvislosti,

(d) G je souvislý.

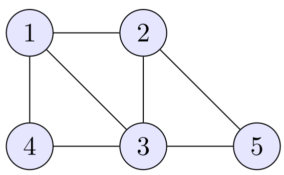
Příklad 3. Uvažme následující tvrzení:

- *Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.*
- *Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.*
- *Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.*
- *Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.*
- *Mám dobrou kondici.*

(a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii T ve výrokové logice v jazyce $L = \langle b, k, m, s \rangle$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam "být dobrý běžec", "mít dobrou kondici", "uběhnout maraton" a "mít štěstí".

(b) Najděte všechny modely teorie T.

Příklad 4. Uvažme *vrcholová pokrytí* následujícího grafu:



(a) Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše k-prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené k. Označme výslednou teorii jako T_k.

(b) Ukažte, že T_2 nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.

(c) Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

Příklad 5. Sestrojte strom výrazu (a vytvořující strom), zapište v prefixovém, infixovém a postfixovém formátu:

(a) $(3 + 5) * (-2) + (2 * 3)$

(b) $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

(c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \to (p \wedge q))$

Příklad 6. Víme, že:

- *Každý zná sám sebe.*
- *Když člověk studuje na škole, musel se na ni hlásit a ta škola ho přijala.*
- *Alfons se nehlásil na školu, která přijala někoho, kdo Alfonse zná.*

Formalizujte naše znalosti. (Uměli byste ukázat, že *"Alfons nestuduje na žádné škole."*?)

Příklad 7. Najděte formule v predikátové logice v jazyce grafů, které v *teorii grafů* (neorientovaných, bez smyček) vyjadřují následující vlastnosti. Kdy to lze v logice prvního řádu, a kdy je třeba logika druhého řádu?

(a) graf obsahuje vrchol stupně 1

(b) graf je regulární stupně 3,

(c) graf obsahuje k-kliku (pro nějaké fixní k),

(d) existuje cesta délky k z vrcholu u do vrcholu v (pro nějaké fixní k),

(e) vrcholy u a v mají alespoň jednoho společného souseda,

(f) graf je bipartitní,

(g) graf má perfektní párování,

(h) vrcholy u a v leží v jedné komponentě souvislosti,

(i) graf je souvislý.

Příklad 8. Najděte formule prvního řádu vyjadřující následující vlastnosti v jazyce uspořádaných množin:

(a) x je nejmenší prvek,

(b) x je minimální prvek,

(c) x má bezprostředního následníka,

(d) každé dva prvky mají největšího společného předchůdce.

Příklad 9. Vyjádřete v logice prvního řádu v jazyce s jedním unárním funkčním symbolem f, že funkce je

(a) prostá,

(b) na,

(c) bijekce.