NAIL062 Logika: 10. cvičení

Příklad 1. Uvažte následující tvrzení:

(i) *Nula je malé číslo.*

(ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*

(iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*

(iv) *Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení po řadě jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0\rangle$ s rovností.

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$ a zda platí $T \models M(f(0))$.

(d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Příklad 2. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 3. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \;\rightarrow\; y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\rightarrow\; x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) použijte (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 4. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d)$$
$$\psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je jejich důsledek.)

(b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí.

(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.

(d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R \rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x,x), R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z), R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y\}$$

Příklad 5. Uvažte následující tvrzení:

(i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.

(ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.

(iii) U každého docenta někdo studuje.

(iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.

(v) Každou učebnici někdo přečetl.

(a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti, kde N, S, P jsou binární relační symboly ($N(x,y)$ znamená "x napsal y", $S(x,y)$ znamená "x studuje u y", $P(x,y)$ znamená "x přečetl y") a D, U jsou unární relační symboly ("být docentem", "být učebnicí"). *(2b)*

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. *(3b)*

(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte. *(1b)*

(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte. *(2b)*

(e) Uvažme teorii $T' = T \cup \{D(x), S(x,y), P(x,y)\}$. Kolik má teorie T' dvouprvkových modelů (až na izomorfismus)? Zdůvodněte. *(2b)*