NAIL062 Logika: 11. cvičení

Příklad 1. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$

(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Příklad 2. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$

(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y) \to R(x,y))$

Příklad 3. Ověřte následující. (Tj. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli.)

(a) $\models (\forall x)P(x,f(x)) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)$

(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\forall x)P(x,f(x))$

Příklad 4. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \quad & (\exists y)R(y,x)\\ \varphi_2 = \quad & (\exists z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge (\forall w)(R(w,x) \wedge R(w,y) \to R(w,z)))\end{aligned}$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, R^A \rangle$, kde $(n,m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

Příklad 5. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je teorie v jazyce $L = \langle <, f, g, h \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \quad & (\forall u)(\exists v)(\forall x)(v < x \to u < f(x))\\ \varphi_2 = \quad & (\exists u)(\forall v)(\exists x)(v < x \wedge \neg u < g(x))\\ \varphi_3 = \quad & (\exists u)(\forall x)\neg u < h(x)\end{aligned}$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T.

(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <, \mathrm{id}, \mathrm{tg}', \sin \rangle$, kde $<$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tg}'(k\pi/2) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{tg}'(r) = \mathrm{tg}(r)$ (tg je funkce tangens) pro $r \neq k\pi/2$ s $k \in \mathbb{Z}$ a sin je funkce sinus. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$.