

NAIL062 Logika: 12. cvičení

Příklad 1. Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Vyjádřete tato fakta ve vhodném jazyce logiky prvního řádu a dokažte rezolucí následující tvrzení: “*Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi.*”

Příklad 2. Víme, že platí následující:

- *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe*
- *Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.*

Formalizujte ve vhodném jazyce predikátové logiky a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

Příklad 3. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

- (i) *Každá ovce byla buď porozena jinou ovci, nebo byla naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).*
- (ii) *Žádná naklonovaná ovce neprodila.*

Chceme ukázat rezolucí, že pak: (iii) *Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ v jazyce $L = \langle P, K \rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol, K je unární relační symbol a $P(x, y), K(x)$ značí, že “*ovce x porodila ovci y ”* a “*ovce x byla naklonována*”.
- (b) S využitím Skolemizace těchto formulí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$. Zapište ji v množinové reprezentaci.
- (c) Najděte rezoluční zamítnutí S , znázorněte je rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

Příklad 4. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s \rangle$ bez rovností, kde j, h, q jsou konstantní symboly značící (po řadě) jablka, hrušky, švestky, dále $<$ je binární relační symbol a $x < y$ značí, že “*ovoce y je lepší než ovoce x ”*. Víme, že:

- (i) *Relace “být lepší” je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní relace).*
- (ii) *Hrušky jsou lepší než jablka.*

Chceme rezolucí dokázat následující tvrzení.

- (iii) *Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.*

Konkrétně:

- (a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete otevřenými formullemi jazyka L .
- (b) Pomocí předchozích formulí či jejich negací nalezněte otevřenou teorii T nad L axiomatizovanou klauzulemi, která je nespílitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište T v množinové reprezentaci.

- (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T , která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*
- (e) Je T zamítnutelná LI-rezolucí? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 5. Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti.

- (a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvivalentní teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem).
- (b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.
- (c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S . U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S , která je nesplnitelná.
- (e) Má teorie T jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 6. Ukažte, že daná množina klauzulí je zamítnutelná (rezolucí). Popište zamítnutí pomocí rezolučního stromu. V každém kroku rezoluce napište použitou unifikaci a podtrhněte rezolvované literály.

$$S = \{\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}, \\ \{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}, \\ \{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}, \\ \{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}, \\ \{\neg H(v, a)\}\}$$

Příklad 7. Známe následující informace o zadávání zakázek:

- (i) Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.
- (ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.
- (iii) Pan Lubor je úředník.
- (iv) Některá společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

Pomocí rezoluce dokažte, že: (v) Pan Lubor je kriminálník.

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l \rangle$ bez rovnosti, kde U, Z, S a K jsou unární relační symboly a $U(x), Z(x), S(x), K(x)$ znamenají (po řadě) “ x je úředník / zakázka / společnost / kriminálník”, P, V, O jsou binární relační symboly, kde $P(x, y), V(x, y), O(x, y)$ značí (po řadě) “ x podplatil y ”, “ x vyhrál y ” a “ x je odpovědný za y ” a l je konstanta označující pana Lubora.
- (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$.
- (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci.
- (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T' , která je nesplnitelná.