NAIL062 Logika: 3. cvičení

Příklad 1. Mějme daný graf G (neorientovaný, bez smyček) a dva jeho vrcholy u, v. Sestrojte výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když:

(a) G je bipartitní,

(b) G má perfektní párování,

(c) u a v leží v jedné komponentě souvislosti,

(d) G je souvislý.

Příklad 2. Převeďte následující výroky do CNF a DNF (I) tabulkou (určením modelů), (II) ekvivalentními úpravami.

(a) $(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)$,

(b) $(\neg p \to (\neg q \to r)) \to p$,

Příklad 3. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.

(a) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledky T?

(b) Určete všechny modely T.

Příklad 4. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = m$. Určete počet až na ekvivalenci:

(a) výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,

(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,

(c) úplných teorií nad $\mathbb{P}$ ve kterých platí φ,

(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Příklad 5. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$,

(b) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$,

(c) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$.

Příklad 6. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Příklad 7. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná.

(a)

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (p_2 \wedge \neg p_3) \wedge (p_1 \wedge p_3)$$

(b)

$$(\neg p_1 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_6 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_4 \wedge \neg p_2) \vee$$
$$(p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_6 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_4) \vee (p_1 \wedge p_5) \vee$$
$$(p_1 \wedge p_6) \vee (\neg p_6 \wedge p_3 \wedge \neg p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)$$

Příklad 8. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa krajů Česka

(b) Těžší instance