NAIL062 Logika: 5. cvičení

Příklad 1. Mějme daný graf G (neorientovaný, bez smyček) a dva jeho vrcholy u, v. Sestrojte výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když:

(a) G je bipartitní,

(b) G má perfektní párování,

Příklad 2. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výslechu bylo zjištěno následující:

- *Alespoň jeden z vyslýchaných říká pravdu a alespoň jeden lže.*
- *Adam říká: "Barbora nebo Cyril lžou"*
- *Barbora říká: "Cyril lže"*
- *Cyril říká: "Adam nebo Barbora lžou"*

(a) Vyjádřete naše znalosti jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že *"Adam/Barbora/Cyril říká pravdu"*.

(b) Najděte všechny modely teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$.

(c) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T.

(d) Ukažte (libovolnou metodou), že z teorie T plyne, že: *Adam říká pravdu.*

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$ v jazyce $\{p, q, r, s\}$.

(a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T, lživý v T, nezávislý v T, splnitelný v T, a dvojice T-ekvivalentních výroků.

(b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T? T-ekvivalentní?

$$p,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \to r,\ \neg q \to r,\ p \vee q \vee r \vee s$$

Příklad 4. Převeďte následující výrok do CNF a DNF tabulkou a ekvivalentními úpravami:

$$((p \to \neg q) \to \neg r) \to \neg p.$$

Příklad 5. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.

(b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

(c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) úplnou teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Příklad 6. Uvažte následující dvě teorie:

(I) $T = \{p \wedge q, p \rightarrow \neg q, q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$

(II) $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$

(a) Rozhodněte, zda je teorie T [konzistentní/splnitelná/kompletní]. (konzistentní=bezesporná, kompletní=úplná)

(b) Uveďte příklad výroku φ, který je [platný/nesplnitelný/nezávislý] v T

(c) Uveďte příklad rozšíření T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno, neekvivalentního s T), které je [jednoduché/konzervativní/kompletní/konz. jedn./kompl. jedn./kompl. konz.].

Příklad 7. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$,

(b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$.

Příklad 8. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely následující teorie:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Příklad 9. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad

(a) $\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(b) $\{q \rightarrow p,\ r \rightarrow q,\ (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$

Příklad 10. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

(a) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q),\ \neg p \rightarrow q,\ r \rightarrow q\}$

(b) $\{q \rightarrow p,\ r \rightarrow q,\ (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$