# NAIL062 Logika: 9. cvičení

**Příklad 1.** Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$

(c) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

**Příklad 2.** Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli $\varphi$. Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$

(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$

(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$

(d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

**Příklad 3.** Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?

(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.

(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?

(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?

(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

(f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

**Příklad 4.** Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je $T$ (sémanticky) konzistentní?

(b) Jsou všechny modely $T$ elementárně ekvivalentní? Tj. je $T$ kompletní?

(c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze $T$.

(d) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí $T$? Je $T'$ jednoduchá extenze $T$? Je $T'$ konzervativní extenze $T$?

**Příklad 5.** Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.*

**Příklad 6.** Uvažte následující tvrzení:

(i) *Nula je malé číslo.*

(ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*

(iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*

(iv) *Je-li $x$ blízko $y$, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li $x$ a $y$ malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení po řadě jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ s rovností.

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$ a zda platí $T \models M(f(0))$.

(d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie $T$.

**Příklad 7.** Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z $x$ do $y$"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z $x$ do $y$"*. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.